Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2024»
Заключительный тур
11 февраля 2024 года
6 класс

▷ **1.** Цену на яблоки подняли на 20%. Однако продавцу для того, чтобы изменить ценник, оказалось достаточным поменять местами цифры стоимости килограмма яблок. Сколько стоили яблоки до их подорожания, если эта цена была меньше 100 рублей?

Решение: Яблоки стоили 45 рублей за киллограмм.

$$a \leq a, b \leq a$$

$$(10a + b)1,2 = 10b + a \Leftrightarrow 5a = 4b, a = 4, b = 5$$

$$10a + b = 45$$

▷ **2.** Найдите все значения n, при которых сумма $1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3 + \cdots + 1 \times 2 \times \ldots (n-1)$ является точным квадратом.

Решение:

$$1! = 1, n = 1; 1! + 2! = 3, n = 2;$$

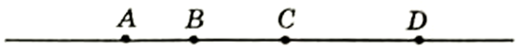
$$1! + 2! + 3! = 9, n = 3; 1! + 2! +! + 4! = 33, n = 4;$$

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! = 33 + 120 = 153.$$

В дальнейшем последней цифрой всегда будет 3, поскольку прибавлять будем числа, оканчивающиеся нулем. Поэтому квадратов больше не будет. Таким образом, $n = 1; 3$.

▷ **3.** На прямой произвольно расположены четыре точки A, B, C, D. Найти все такие точки, что сумма расстояний от них до заданных точек является наименьшей.

Решение: Пусть длина отрезка AB равна x, отрезка BC — y, отрезка CD — z.



Тогда, если точка лежит левее A, сумма расстояний от нее до данных точек больше, чем от A. То же самое, если она лежит правее D. Если точка лежит на отрезке BC, то сумма расстояний от нее до B и C всегда равна y, а до A и D всегда равна $x + y + z$. Сумма всех расстояний тогда равна $x + 2y + z$.

Если точка лежит на отрезке AB, но не совпадает с B, то сумма расстояний от нее до A и B всегда равна x, а до B, C и D всегда больше, чем $2y + z$. Вся сумма расстояний тогда больше, чем $x + 2y + z$. Аналогично для точек отрезка CD, не совпадающих с C. Таким образом, условию удовлетворяют все точки отрезка BC и только они.

▷ **4.** В 6 классе учится 30 учеников. Во время диктанта один ученик сделал 12 ошибок, а остальные - меньше. Доказать, что в классе есть по крайней мере три ученика, сделавших одно и то же число ошибок.

Решение: Заготовили 13 ящиков с номерами 0, 1, 2, ..., 12. Каждую работу положили в ящик с номером, равным числу ошибок в этой работе. Так как 13*2=26<30, то найдется ящик, в котором не менее трех работ.

▷ **5.** Поставить вместо звездочек такие цифры, чтобы число 32*35717* делилось на 72.

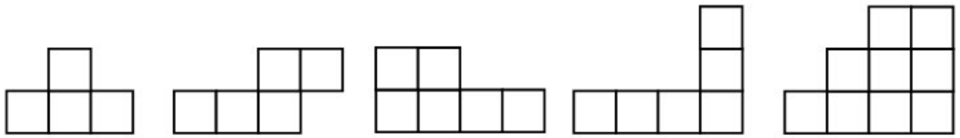
Решение: Чтобы число делилось на 72, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 8 и на 9. Чтобы оно делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы на 8 делилось число, составленное из трех последних его цифр в том же порядке. Для числа 17* это 176, то есть последняя цифра 6. Для делимости на 9 необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр числа делилась на 9. Сумма цифр числа 32*357176 без * равна 34. $0 \leq * \leq 9$. * может быть только 2, то есть искомое число 322357176.

▷ **6.** Найдите два числа, если их сумма равна 432, а наибольший общий делитель равен 36.

Решение: Поскольку наибольший общий делитель чисел равен 36, их можно записать как 36x и 36y, где x и y - взаимно просты. Тогда $x + y = \frac{432}{36} = 12$. Тогда возможные пары (x;y) - это (1;11) или (5;7). Искомые числа соответственно: 36 и 396 или 180 и 252.

▷ **7.** Используя четыре из пяти нарисованных ниже фигур, можно составить квадрат. Какая фигура является при этом лишней?

Решение: Выпишем, из скольки клеток состоит каждая фигура: 4, 5, 6, 6, 9. Всего 30 клеток. Количество клеток в составленном квадрате должно являться точным квадратом натурального числа, меньшим 30. Подходящее значение $5^2 = 25$ клеток. Для этого нужно выкинуть фигуру из 5 клеток, а из оставшихся



четырех составить квадрат 5×5 . Заметим, что получить квадрат 4×4 из 16 клеток невозможно, в этом случае надо было бы выкинуть фигуру из 14 клеток, а такой нет.

▷ **8.** Решите уравнение: n + S(n) = 2024, где S(n) - сумма цифр числа n.

Решение:

$$S(n) \leq 9 * 4 = 36.n + S(n) = 2024$$

$$n \geq 1988 \to n = 1900 + 10k + l, 2 \geq k \geq 9, 0 \geq l \geq 9$$

$$1900 + 10k + l + 10 + k + l = 2024, 11k + 2l = 114, 2 \geq 2l \geq 18$$

$$96 \geq 11k \geq 114, 8\frac{8}{11} \geq k \geq 10\frac{4}{11} \to k = 9, 2l = 15,$$

решений нет.

$$n \geq 2000, n \leq 2024$$

$$2 \leq S(n) \leq 2 + 1 + 9 = 12$$

$$n + S(n) = 2024$$

$$2012 \leq n \leq 2022.$$

$$n = 2000 + 10a + 1$$

$$2002 + 11a + 2 = 2024$$

$$a = 2, b = 0.$$

Ответ: $n = 2020$.

▷ **9.** Ученики четырех классов решили посадить около школы сад. Ученики четвертого класса посадили половину всех деревьев, а ученики третьего класса — $\frac{1}{3}$ того, что посадили другие классы вместе. Ученики второго класса посадили $\frac{1}{4}$ того, что посадили остальные. Ученики первого класса посадили пять деревьев. Сколько деревьев было посажено всего?

Решение: Число деревьев обозначим через x. Тогда $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 5 = x$ и $x = 100$.

$$IV - \frac{x}{2}$$

$$III - y = \frac{1}{3}(x - y) \to y = \frac{1}{4}x$$

$$II - z = \frac{1}{4}(x - z) \to z = \frac{x}{5}.$$

▷ **10.** На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов может его выпить за 1 день, а стадо из 37 слонов за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро один слон?

Решение: Пусть V(л) - объем озера, V_1(л) — объем воды, который вытекает каждый день из ключей. Допустим, что один слов впивает x литров воды в сутки. Тогда $37 \times 5 = 185$.

$$\begin{cases} 183x = V + V_1, \\ 185x = V + 5V_1, \end{cases}$$

откуда $V_1 = \frac{1}{2}$. Таким образом, из ключей выеткает в сутки воды больше, чем может выпить один слон.

$$\begin{cases} 2nV_1 = V + nV_1, \\ nV_1 = V \end{cases}$$

$$\begin{cases} 366x = 2V + x, \\ 365x = 2v = v + v \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2V_1, \\ 365V_1 = V. \end{cases}$$

Ответ: 1 год (невисокосный) = 365 дней.